

Title	銀河力学構造構築：M2M法の紹介とデータ解析方法 (長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して)
Author(s)	矢野, 太平
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1885: 73-85
Issue Date	2014-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/195705">http://hdl.handle.net/2433/195705</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 銀河力学構造構築 (M 2 M法の紹介とデータ解析方法)

国立天文台 JASMINE 検討室 矢野 太平

Taihei Yano

JASMINE Project Office,  
National Astronomical Observatory

### 1. はじめに

銀河は  $10^{12}$  個の恒星やダークマターなどから構成させる多体系であり、長距離力である重力を媒介する重力多体系である。ここではこの銀河という重力多体系に着目し、宇宙が生まれてから現在に至り、ある定常状態になった際、どのような力学構造となるのか、すなわち、全重力物質がどのような位相分布関数になるのかを知ることは宇宙物理学の重要な課題の一つである。観測的側面からいえば、位置天文観測精度の向上により我々の銀河系の全域にわたって高精度に星の距離や位置、運動に近い将来わかりつつある状況である。従って、今こうした銀河の力学構造の構築の手法を検討しておく事が重要である。以下ではまず位置天文観測の現状について簡単に説明する。そのあと力学構造の構築について順次説明する。

### 2. 位置天文観測

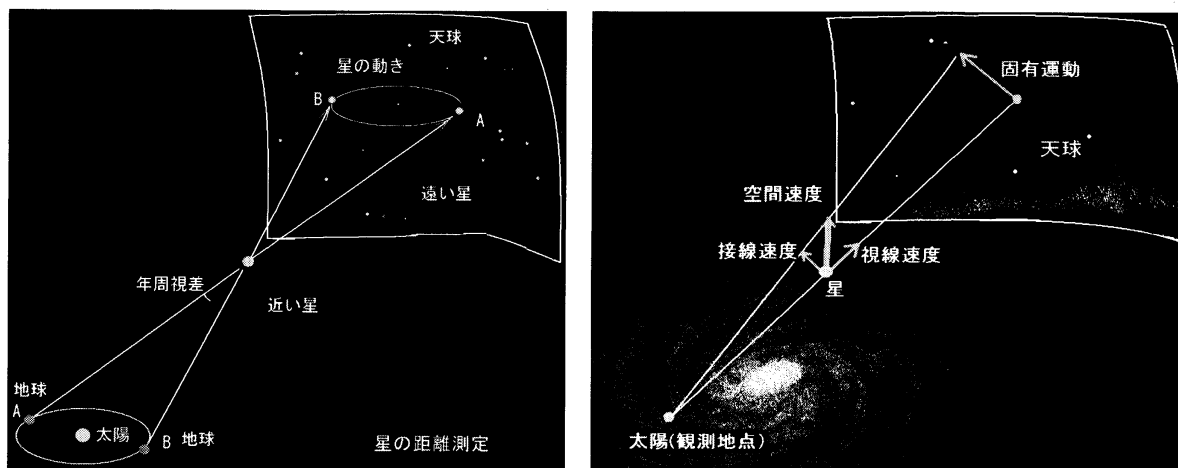


図 星の距離測定方法 年周視差 (左) と固有運動 (右)

位置天文学は、星の見かけの位置やその時間変化を精密に測定する学問であり、それにより、星の位置や距離、すなわち 3 次元的な位置と、その星の運動情報を得ることができる。星の距離は三角測量の原理で求められる。太陽が地球の周りを公転運動するのに伴って背景の星に対して比較的近傍にある星は楕円運動をして観測される。その楕円運動のサイズ

が大きい程近距離にあり、小さい程遠方にある事がわかる。このように地球の公転運動に伴う楕円運動の角距離（半径を年周視差という）の大きさにより星までの距離を見積もることができる。また、求めた距離と天球面上の年間あたりの移動角距離（固有運動）から移動速度が導出できる。こうした位置天文観測は 20 世紀までは地上観測により行われていたが、大気の揺らぎや重力による望遠鏡のたわみなどの影響により高精度を上げるのには限界に達しつつあった。そういう状況の中、スペースでの位置天文観測は 1989 年に打ち上げられたヨーロッパの **Hipparcos** 衛星の成功で幕をあけた。個々の星の固有運動や年周視差などが測られ、銀河力学に対する一定の成果を上げている。ところが、**Hipparcos** 衛星で測定できるのは 1 ミリ秒角であり、信頼できる距離決定に必要な 10% 以下の精度で求められている領域はわずか 100pc であり、銀河系全体 30kpc に対してごく一部にとどまっている。そうした中、ヨーロッパでは、全天の星の位置や距離、固有運動を高精度に測定する **Gaia** が、2013 年 12 月打ち上げ予定であり、日本でも国立天文台を中心に、銀河中のダストなどの影響をあまり受けず、天の川面の観測に適した近赤外線で見える星の位置、距離、固有運動の観測を行う赤外線スペースアストロメトリ計画（**JASMINE** 計画）が進められている。これら計画は 10 マイクロ秒角精度の測定を行う予定であり、**Hipparcos** 衛星から 2 桁の精度向上となる（10Kpc～3 万光年まで高精度に観測）。これにより、今までにうかがい知れない銀河系力学の詳細が明らかになる事は間違いない。このように、位置天文観測の重要性が高まっている。

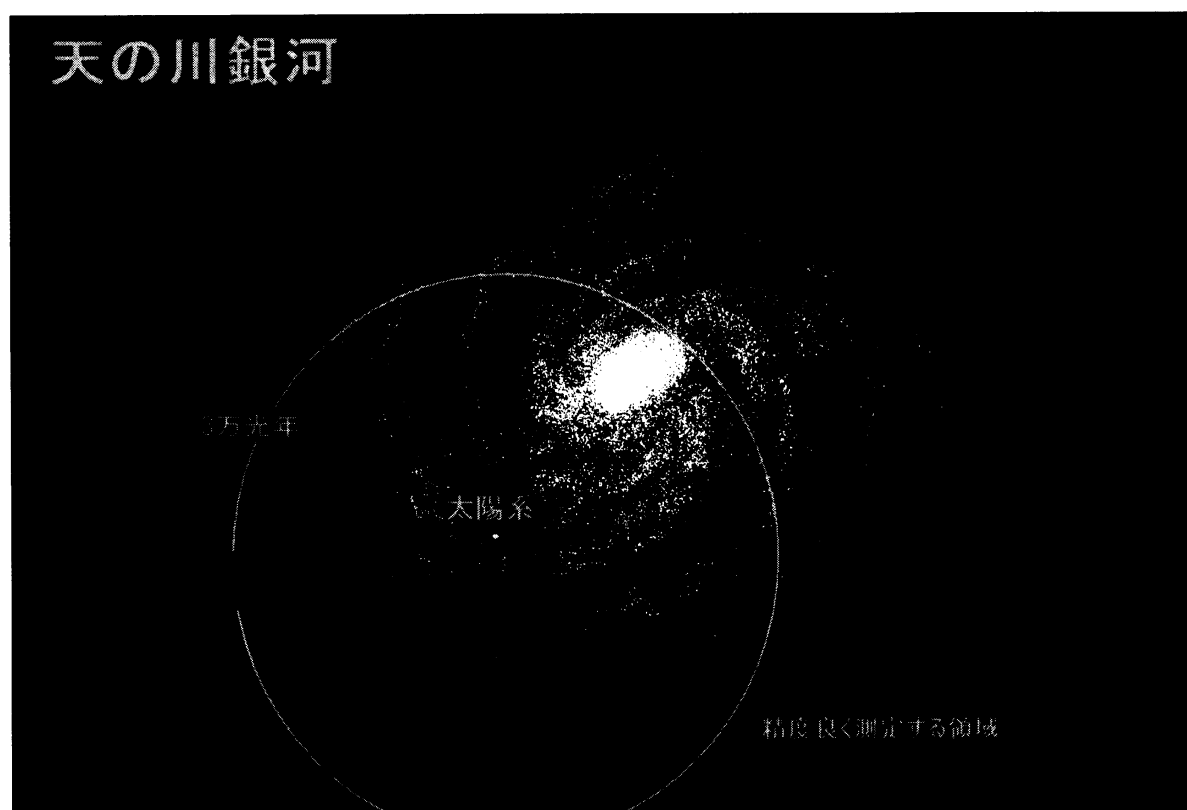


図 位置天文観測衛星 **Gaia** や **JASMINE** の高精度観測可能な領域

近年、位置天文観測精度が向上し、銀河系の中心領域であるバルジでも個々の天体の運動まで議論ができるようになってきている。更に、2013年12月天の川銀河全域にわたり、星までの距離や運動を測定する位置天文観測衛星 Gaia が打上げられると、銀河系は観測に基づいた個々の星の運動レベルでの力学的な構造が初めて議論できるようになる。そうすると、銀河系全体を力学的に整合性のある構造に構築することが可能な時代を迎える事となる。この、力学構造を知るというのは、上で述べたように全重力物質の位相分布関数を知る事である。

銀河力学的構造の構築と関係する過去の仕事として、Schwarzschild (1979) の方法や Syer & Tremaine (1996)の方法をはじめとして、銀河力学の権威である Binney を中心とするグループで検討されているトーラス構築法(McGill & Binney 1990, Kaasalainen & Binney 1994)など、いくつかの方法がある。

しかし、観測できる星の位相空間情報だけでは重力ポテンシャルの情報がないので、力学的な構造の構築は容易ではない。まだ、基本的な検討に留まっているといわざるを得ない状況である。また位置天文情報と比較した星の軌道の構築の議論は皆無である。そこで、銀河系の星の軌道レベルでの構造の構築の理論作りと、将来得られる位置天文情報から銀河系の軌道の構成を実際に構築する一連の手法を確立していく。

### 3 銀河系の力学構造の構築

銀河系の力学構造の構築、すなわち位相分布関数  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$  を求めるに際し、銀河系は dynamical time に比べ十分長い時間たった定常状態であるといえる。従ってまず、ここでは、分布関数を  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  と表記して考えて良いとして、それがどういう関数であるかを考える。では、どのようにして、分布関数を構築するのか？その手順の全体像を以下で示す。

力学構造構築の手順を要約すると以下ようになる。

#### 1. 重力ポテンシャルより、作用変数 $J$ と $(x, v)$ の関係を導出

このステージでは、仮定された重力ポテンシャルのもと、作用変数  $J$  と  $(x, v)$  の関係を明らかにし、 $f(x, v)$  と  $f(J)$  の関係を定める

#### 2. 重力ポテンシャルと分布関数の導出

重力ポテンシャル（ハミルトニアン）の形状を仮定し、それと共に矛盾しないよう、分布関数を定める。

#### 3. 観測との比較

観測誤差を考慮し、観測される分布関数  $f_{\text{obs}}(x, v)$  と比較。

重力ポテンシャルおよび位相分布関数を決定する。

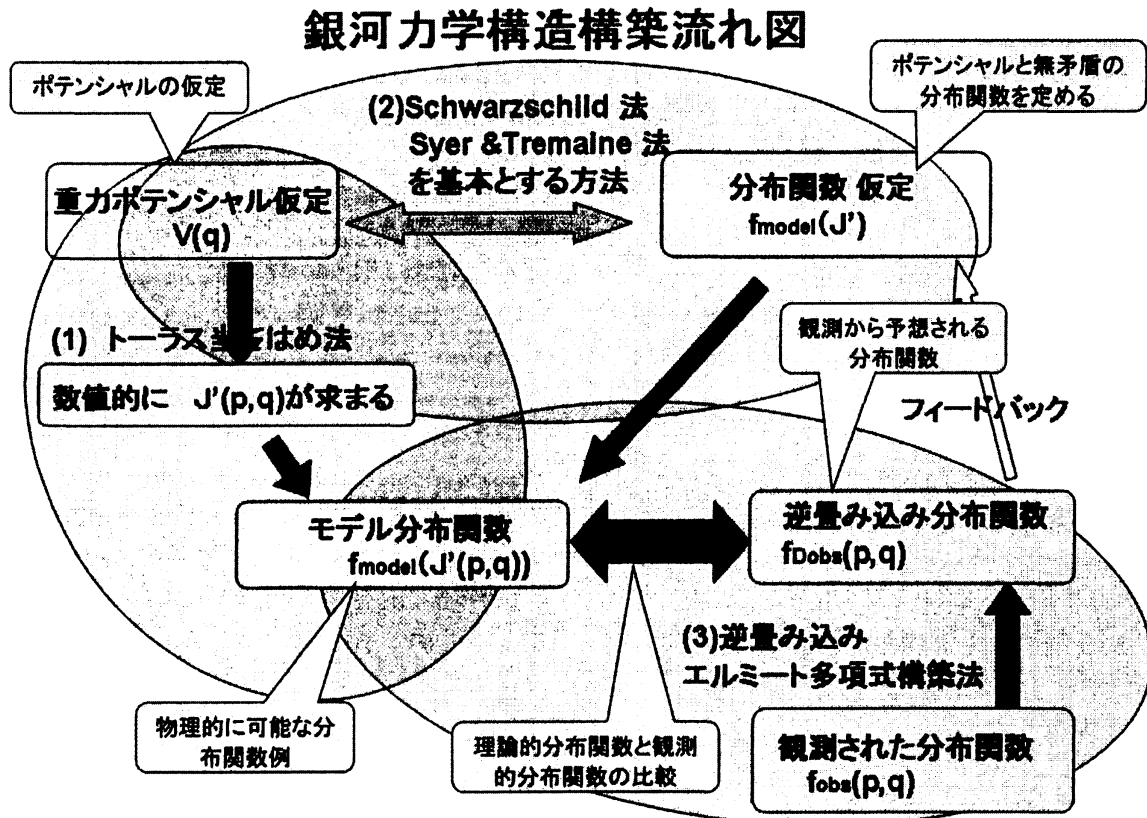


図 銀河力学構造構築の流れ図

以上、3つのステージについて以下説明をする。

1. 重力ポテンシャルにより作用変数  $J$  と  $(x, y)$  の関係を導出  
この部分は上田氏が発表をおこなう。

## 2. 重力ポテンシャルから分布関数の導出

ここでの課題は以下の通りである。ある与えられたポテンシャルあるいは、そうしたポテンシャルを実現する密度分布  $\rho(x, y, z)$  から、分布関数  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  を導出したい。これまでの方法として、Schwarzschild 法というのがある。この方法は以下の図にまとめているように、与えられたポテンシャルに対して、たくさんの軌道を準備し、適切に軌道を足し合わせその重力ポテンシャルに見合う密度分布を再現させる方法である。

- Schwarzschild(1979)

適切に軌道を足し合わせ、重力ポテンシャルに見合う密度分布を再現させる。

$$\rho(x, y, z) = \sum_i w_i \Delta_i(x, y, z)$$

$\rho$ は密度

$\Delta_i$ は*i*番目の軌道のサンプル

$w_i$ は*i*番目の軌道のウェイト

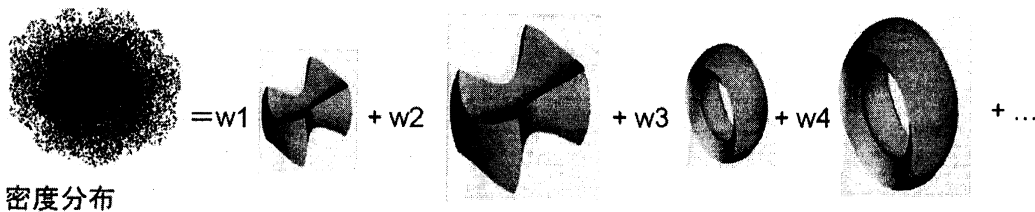
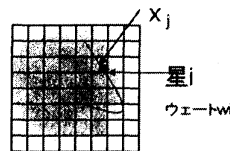


図 シュバルツシルド法概念説明

この Schwarzschild 法の欠点としては、準備として、多くのサンプル軌道をすべて計算しておく必要がある。この軌道に長時間の計算が必要なこと、また計算された膨大な軌道データのストックが必要であるという事があげられる。また、この Schwarzschild 法で構築されたモデルが安定であるかどうかはわからない。

より実用的な方法として、Syer & Tremaine (1996) (M2M法) というのがある。この方法は、ポテンシャルに応じた様々な軌道の割合  $w_i$  を求める際、粒子をポテンシャル中で運動させながら、密度分布を満たすよう、割合  $w_i$  を変化させて、定常になるまで計算する。

## アルゴリズム



- 軌道の計算を行いながら、各軌道の重み  $w_i$  に対して、以下の基準で収束するまで時間発展させる。

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = -\varepsilon w_i(t) \left( \frac{\partial \chi^2}{\partial w_i} \right) = -\varepsilon w_i(t) \sum_{j=1}^J \frac{\delta(x_j - x_i(t))}{\rho_0(x_j)} \Delta_j(t)$$

ただし  $\chi^2 = \sum_j \Delta_j^2 \quad \Delta_j = \frac{\rho(x_j, t)}{\rho_0(x_j)} - 1$

$w_i$  軌道*i*の重み

$\varepsilon$  定数

$\rho_0(x_j)$  与えられたポテンシャルで満たされる密度分布(メッシュ*j*番目)

$\Delta_j > 0$  ならば、その*j*メッシュにかかわる軌道*i*のウェイト  $w_i$  を減少させる。 $\Delta_j < 0$  はその逆。

図 Syer Tremaine 法 (M2M法) アルゴリズム

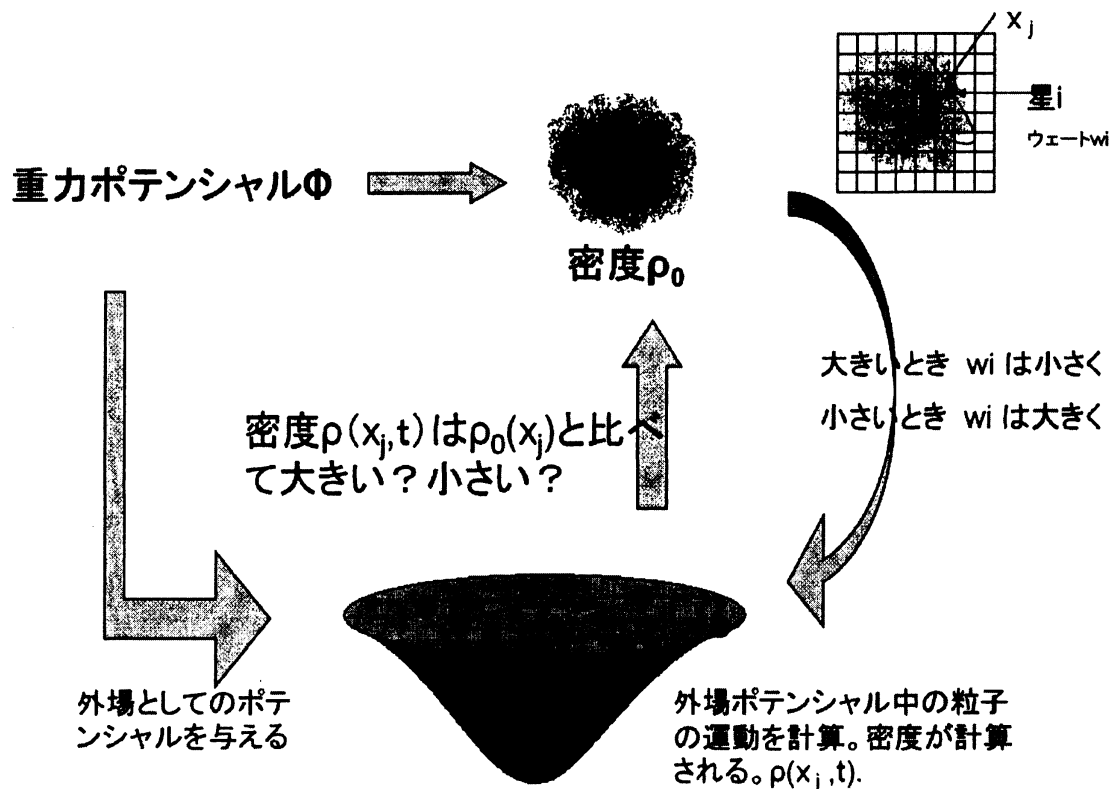


図 Syer Tremaine 法 (M2M法) 概念説明

### ●球対称モデルでの実験

球対称モデルによる実験を示す。ここでは **Plummer model** モデルと呼ばれる重力ポテンシャルのモデルを用いる。

**Plummer model** は以下の式で与えられる。

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

上述のポテンシャルを持つ分布関数をM2M法で求める。ポアソン方程式より重力物質の密度分布は以下の通りとなる。

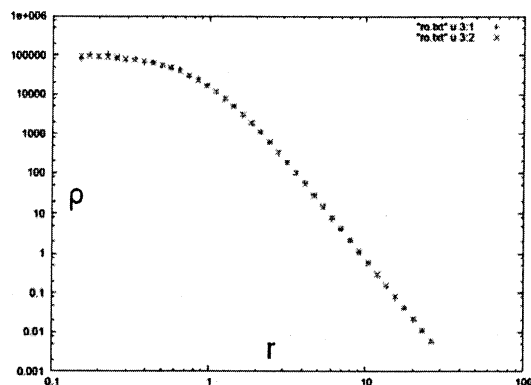
$$\rho = \left(\frac{3M}{4\pi a^3}\right) \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

上述  $\rho$  をもとに分布関数を導出してみる。ちなみに、等方性を仮定すると分布関数は

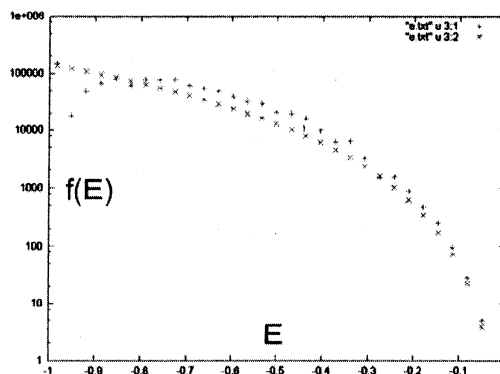
$$f = \frac{3}{7\pi} (2E)^{\frac{7}{2}}$$

となる。

## Plummer model



密度分布  $\rho(r)$

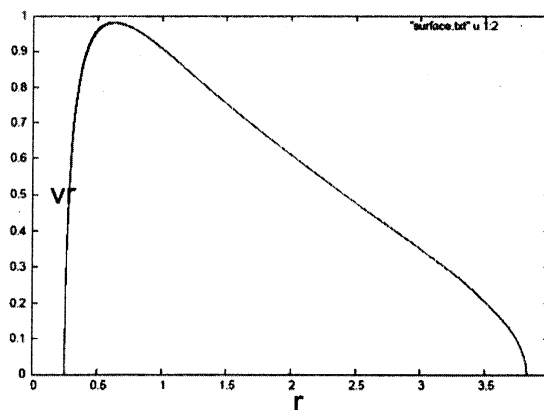
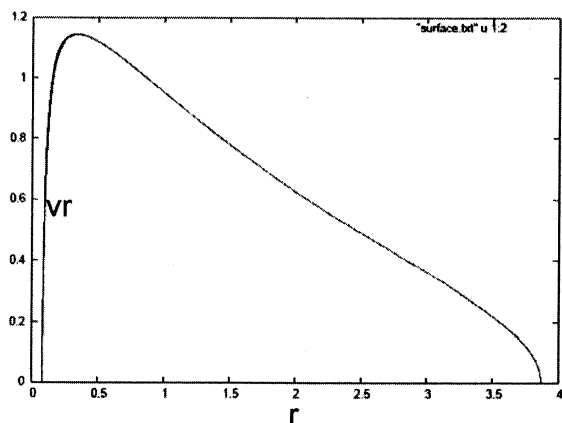


(緑)  $f(E)$  理論値 (isotropicを仮定)

(赤) 導出された  $f(E)$

図 M2M法による計算結果。密度分布は正しい分布となっているが、その際の分布関数は *isotropic* を仮定したものとは異なる分布関数が導出される結果となった。

理論値  $f(E)$  と M2M法で求めた  $f(E)$  は異なっている事について理論的導出は速度等方性を仮定している。しかし、一般には球対称モデルであっても粒子の運動状態を表すのに  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  の 6 変数必要だが、積分量で表すと、 $(E, L, \theta_1, \theta_2, L/L)$  となる。球対称性より空間次元を落とす際  $L/L$  は除かれる。以上より一般には  $f(E, L)$  (変数  $\theta_1, \theta_2$  は積分量ではない) というように表記される。



Plummer model において、 $E=-0.529, L=0.1$ (左)  $0.3$ (右) の軌道

図 あるきまったエネルギーにおいて角運動量 2 種の軌道

以上、説明した事を確かめるため  $E$  一定で、2 種類の  $L$  の軌道を求めた。  $L$  を変更する事で上述軌道の形状が異なっている。また閉曲線軌道が得られており積分量である。この系は積分量が  $E$  と  $L$  であって他の積分量がない事を示している。 すなわち  $f = f(E, L)$  である。実験の内容を以下パネルで整理した。



## ・ 以上実験の整理

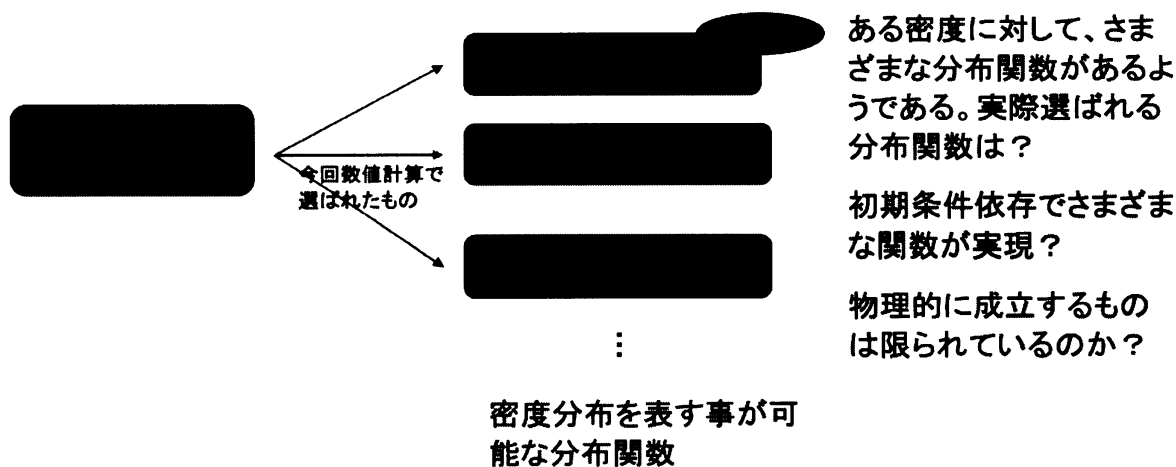


図 密度分布から分布関数の再現についての整理

### ● 軸対称モデル

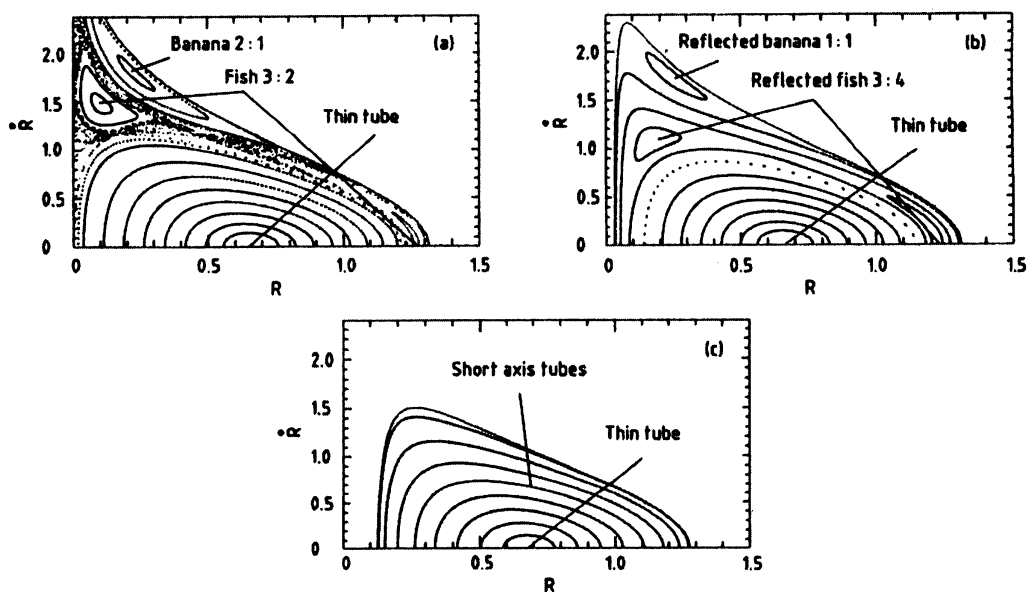


Figure 4. Surfaces of section for an oblate, scale-free, power-law galaxy with declining rotation law ( $\beta=0.18$ ,  $q=0.85$ ). The energy  $E$  is 5.29, and the values of the angular momentum component  $L_z$  are (a) 0.0, (b) 0.1 and (c) 0.3. The majority of orbits are short-axis tubes, but there are resonant families and chaotic trajectories at low  $L_z$ .

軸対称モデルにおいて、 $E=\text{const}$ ,  $L_z$  3種類についての軌道

$E$ ,  $L_z$ を定めてもなお複数のトーラス⇒別の積分量の存在

図 軸対称モデル。エネルギー一定のもと、 $L_z$  3種の軌道

次に軸対称モデルについて、粒子の運動状態を表す $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ の6変数について積分量で表すと、 $(E, L_z, \theta_1, \theta_2, \alpha, I)$ となる。 $E$ と $L_z$ を定めてもなおかつ閉曲線軌道のトーラス

が現れる。これは別の積分  $I$  の存在を意味する( $I$ は  $E, L$  とは異なる積分量)。以上より  $f(E, L, z, I)$  というように表記される。ただし、 $I$  は何かよくわからない。

### 3. 観測との比較

最後に、得られた分布関数のモデルと観測された分布関数を比較する必要がある。比較といっても単純に比較はできない。それは以下のような原因のためである。

- ・星の距離測定に大きな誤差が含まれる。
- ・観測される星は実際にある星の一部である。
- ・全重力物質はダークマターも含まれ、星はその一部である。

そこで、理論的に導出された分布関数と観測された分布関数を比較する際には、以下の図に示すようなプロセスをとる。

理論、数値実験と観測との比較をするため、以下の手順が必要となる。

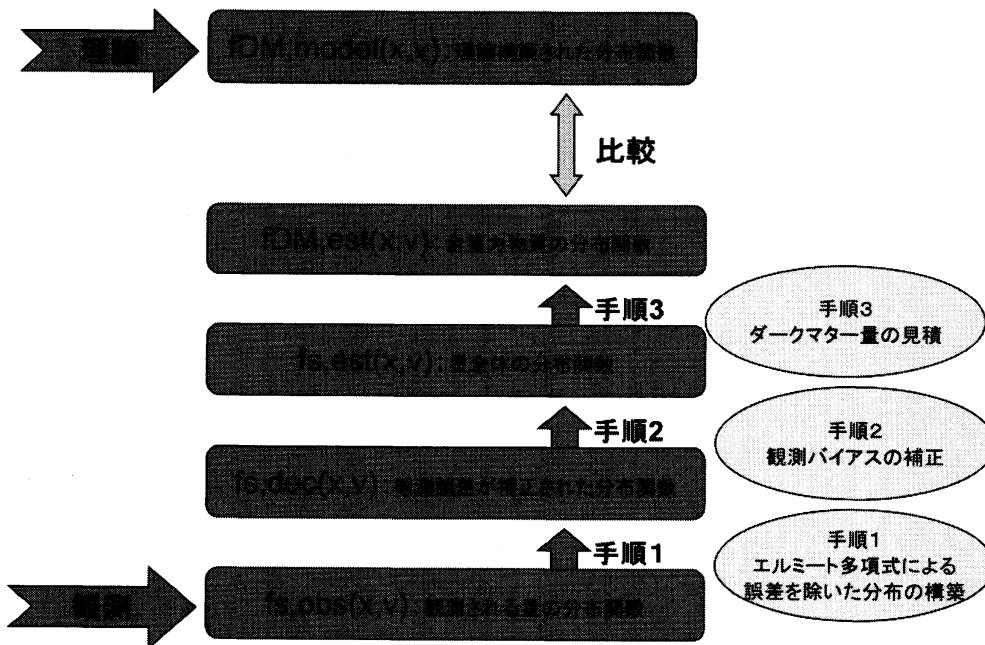


図 理論的に導出された分布関数と観測された分布関数の比較手順整理

以下各手順を簡単に説明する。

#### 手順1. $f_{s,obs}(x,v)$ から $f_{s,dec}(x,v)$ の見積

観測される星は主に視線方向に大きい誤差を持っており、観測される分布は観測方向にぼやけて広がっている。こうした観測された分布から（統計的意味で）誤差のない分布を構築したい。

誤差を既知する。誤差とパルジの視線方向の形状のコンボリューションが観測される形状なので、観測されるパルジ視線方向の形状に既知の誤差を用いてデコンボリューションすると実際のパルジの形状が見積もられる。



図 観測誤差による分布形状変化。視線方向に伸びてしまうが既知の誤差から実際の分布形状を見積もる。

距離見積りの誤差補正はいかに考える。ある物理量(例えば密度分布)を見積もる場合、真の分布  $f$  に観測誤差  $h$  の加わった  $g$  で観測される(観測される分布関数  $g$  は、真の分布関数  $f$  と誤差  $h$  が convolution された関数として観測)。観測値  $g$  から  $f$  を見積もる方法を考える。

真の分布	$f(t) = \exp[-t^2/\sigma_f^2]$
観測誤差 (応答関数)	$h(x t) = \exp[-(t-x)^2/\sigma_h^2]$
観測される分布	$g(x) = f * h = \int f(t)h(x t)dt + \delta \quad (\delta: \text{ノイズ})$
$t$ 実際の空間の座標	
$x$ 観測される空間の座標	

(ノイズ  $\delta$  があるとなかなかやっかいである。。そこで、)

数学的には単純な話であるが、ノイズがあると単純には復元できない。そこで以下のようなエルミート多項式による表現を利用して復元する。

#### エルミート多項式による表現

- 1 各エルミート多項式  $H(i,t)$  を準備。誤差  $h$  と convolution した関数  $H'(i,x) = H(i,t) * h(x,t)$  を作成
- 2 観測される分布関数を  $H'$  の和であらわす。  $g(x) = \sum a(i) H'(i,x)$   
( $a(i)$  は最小 2 乗法で)
- 3 すると、もとの物理量  $f$  は  $f(t) = \sum a(i) H(i,t)$  で表す事ができる。

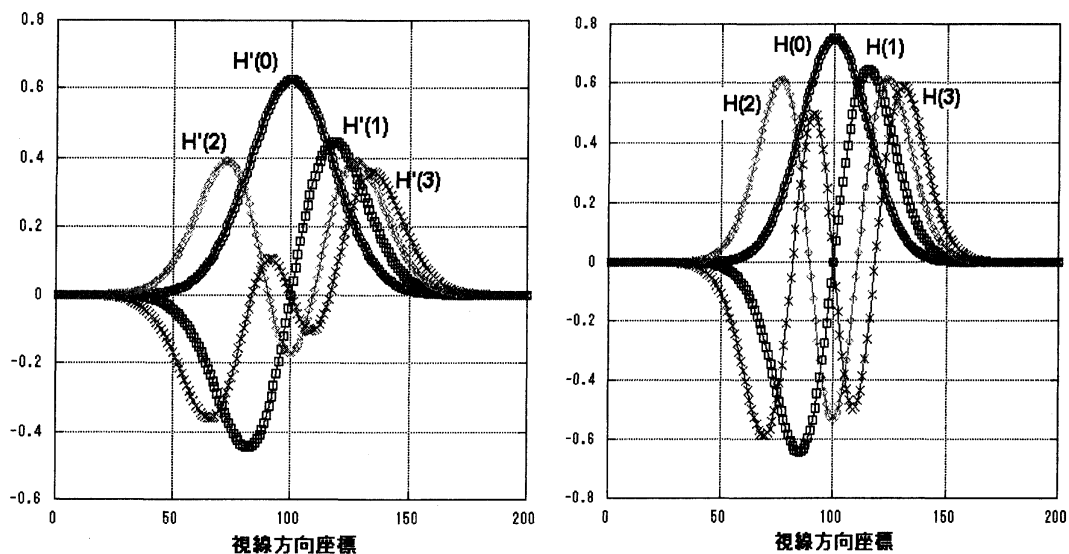


図 エルミート多項式による表現

以上方法で元の分布  $f$  を見積もるが誤差の影響を最小限に抑えるために使用できるエルミート多項式の項数が観測される星の数によって異なる。その使用可能な項数については以下記述する。

#### 復元可能項数

観測する星の個数と精度良く求められるエルミート多項式の展開項数  
(10  $\mu$ as の観測精度 8 kpc に半径 1 kpc 程度のパルジを配置)

星の数の有限性による密度分布のばらつきをあらわす誤差は  $\sigma = \sqrt{(g(i) \cdot g_{\text{total}} / N)}$

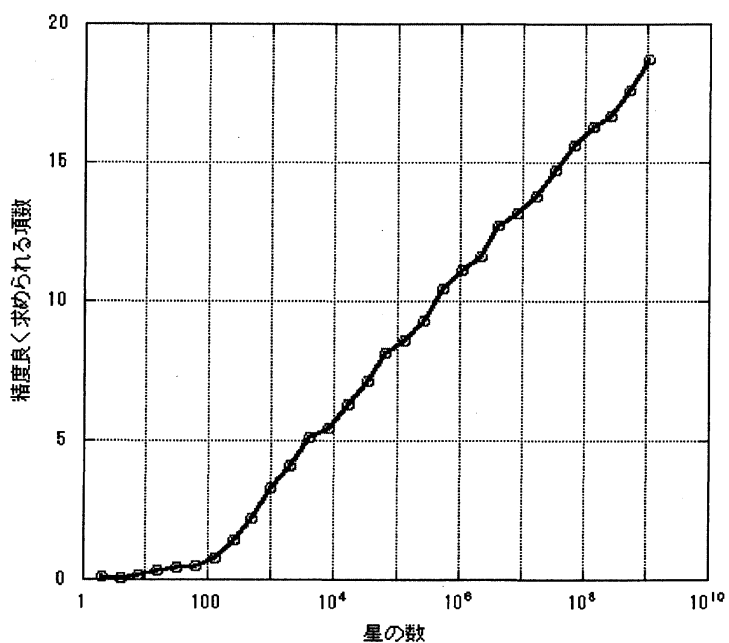


図 観測される星の数と使用できるエルミート多項式の項数

以上図のグラフで示すとおり、観測される星の数に応じて使用できる項数が定められる。  
ここで定められる適切な項数で deconvolution する。

### 手順2. $f_{s,dec}(x,v)$ から $f_{s,est}(x,v)$ の見積

ある、定められた見かけの等級まで観測されるとすると、遠方ほど暗く見えるため絶対等級の明るい星しか観測されない。また、吸収の効果も遠方ほど効くので、より明るい星しか観測されない。このように観測される一部の星から全体の分布を見積もる必要がある。

遠方で暗く見える効果	$\delta m_1 = [5 / \log(10)] \times \log(r / r_0)$
吸収効果	$\delta m_2 = \alpha r \quad (\alpha: \text{比例係数})$
星の等級別分布	$F(M)$ を与える
星の累積等級分布	$S(M) = \int F(M) dM$

基準の等級  $M^*$  を仮定し、各距離の星に対して、 $M^* - \delta m_1 - \delta m_2$  まで観測されるとする。  
すると、 $S(M^* - \delta m_1 - \delta m_2)$  の割合で観測される。

以上から、観測できる星の割合  $W$  が計算される。以下観測できる星の数を模式的に表す。

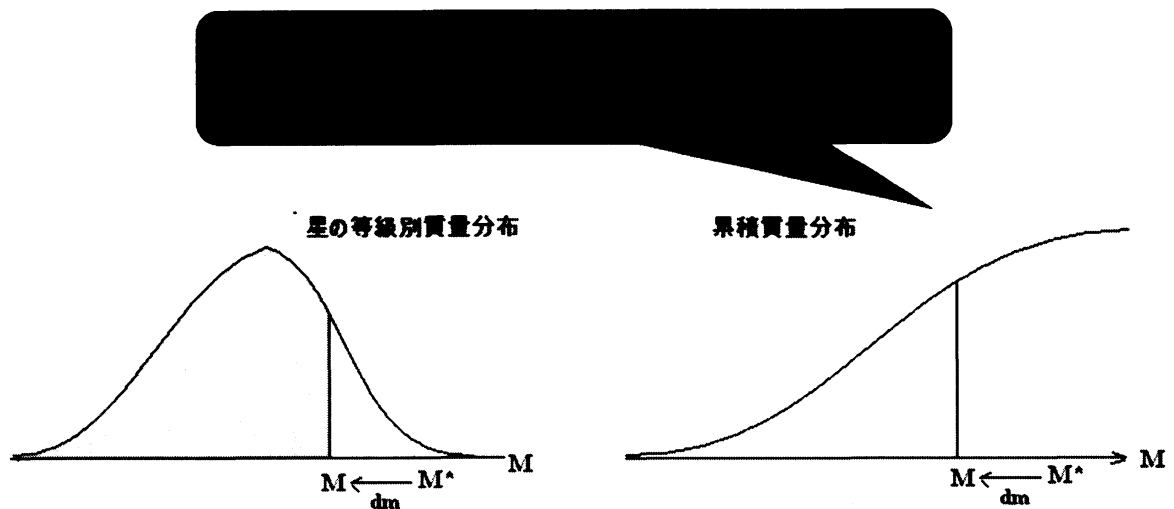


図 星の等級別質量分布と観測割合

### 3. $f_{s,est}(x,v)$ から $f_{DM,est}(x,v)$ の見積もり

最後に星の分布からダークマターを含めた全重力物質の分布関数、すなわち我々が欲する最終段階の分布関数である。この関係は非常に天文学的問題を含んでいて煩雑であり、今後解決すべき課題も多い。いろいろ複雑に考える事も出来るが、はじめの検討としては、

$$f_{DM,est}(x,v) = \beta \times f_{s,est}(x,v)$$

と簡単において考え始める。

#### 4. まとめ

- ・ ポテンシャルから分布関数を導出する手法として、ST法 (M2M法) が有効である。
- ・ 解の一意性、あるいは一意性を得るのに必要な条件の整理が必要である。
- ・ 球対称モデル、軸対称モデル、さらには3軸不等モデルについて手法の確立をおこなう。
- ・ 観測データとの比較は単純ではない。ほとんど未検討であり今後势力的に行う必要がある。

#### 参考文献

Schwarzschild, M. 1979, ApJ, 232, 236

Syer, D. & Tremaine, S. 1996, MNRAS, 282, 223

McGill, C. & Binney, J.J. 1990, MNRAS, 244, 634

Kaasalainen, M. & Binney, J.J. 1994, MNRAS, 268, 1033